

Topologie Algébrique TD 6

2 Décembre 2011

6 Algèbre Homologique

6.1 Manipulation de complexes

Exercice 6.1 (1) Soit $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de groupes abéliens finis. Montrer que $\#M = \#M' \cdot \#M''$ où $\#M$ désigne le cardinal de M .

(2) Déterminer l'ensemble des \mathbf{Z} -modules M tels qu'il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow M \rightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Toutes les suites exactes ainsi obtenues sont-elles scindées ? Que se passe-t-il si on considère des suites exactes de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ -modules ?

Exercice 6.2 On considère une longue suite exacte

$$0 \rightarrow M^0 \xrightarrow{f^0} M^1 \xrightarrow{f^1} \dots \xrightarrow{f^{n-1}} M^n \rightarrow 0$$

de k -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer que

$$\sum_{i \geq 0} \dim(M^{2i}) = \sum_{i \geq 0} \dim(M^{2i+1}).$$

Exercice 6.3 (Lemme des cinq) Considérons le diagramme commutatif de A -modules :

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & M_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & M_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & M_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_2 & \xrightarrow{\beta_2} & N_3 & \xrightarrow{\beta_3} & N_4 & \xrightarrow{\beta_4} & N_5 \end{array}$$

dans lequel les deux lignes sont des suites exactes. Montrer que :

- (1) si f_1 est surjective et f_2 et f_4 injectives, alors f_3 est injective.
- (2) si f_5 est injective et f_2 et f_4 surjectives, alors f_3 est surjective.
- (3) si f_1, f_2, f_4 et f_5 sont des isomorphismes, alors f_3 est un isomorphisme.

Exercice 6.4 (Lemme du Serpent) Soit A un anneau commutatif. On considère le diagramme commutatif de complexes de A -modules :

$$\begin{array}{ccccc} M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M'' \\ \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' \\ N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{q} & N'' \end{array} \quad (1)$$

En particulier $p \circ u = 0 = q \circ v$.

- (1) Montrer que u, p et v, q induisent des applications linéaires naturelles $\tilde{u} : \ker d' \rightarrow \ker d$, $\tilde{p} : \ker d \rightarrow \ker d''$, $\tilde{v} : \text{coker } d' \rightarrow \text{coker } d$ et $\tilde{q} : \text{coker } d \rightarrow \text{coker } d''$ tels que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} \ker d' & \xrightarrow{\tilde{u}} & \ker d & \xrightarrow{\tilde{p}} & \ker d'' \\ \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' \\ M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M'' \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{q} & N'' \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' \\ \text{coker } d' & \xrightarrow{\tilde{v}} & \text{coker } d & \xrightarrow{\tilde{q}} & \text{coker } d'' \end{array}$$

- (2) Montrer que $\tilde{p} \circ \tilde{u} = 0$ et que $\tilde{q} \circ \tilde{v} = 0$.
 (3) Montrer que si u est injective alors \tilde{u} l'est aussi.
 Montrer que si q est surjective alors \tilde{q} l'est aussi.
 (4) Montrer que si $\ker p = \text{Im } u$ et si v est injective alors $\ker \tilde{p} = \text{Im } \tilde{u}$.
 Montrer que si $\ker q = \text{Im } v$ et si p est surjective alors $\ker \tilde{q} = \text{Im } \tilde{v}$.
 (5) On suppose maintenant que le diagramme (1) est exact (c'est à dire $\ker p = \text{Im } u$ et $\ker q = \text{Im } v$) et que, de plus, v est injective et p surjective. Montrer alors qu'il existe une application linéaire naturelle $\delta : \ker d'' \rightarrow \text{coker } d'$ et que la suite

$$\ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } d' \xrightarrow{\tilde{v}} \text{coker } d \xrightarrow{\tilde{q}} \text{coker } d''$$

est exacte. Si de plus, u est injective et q est surjective, alors on peut la compléter en une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \text{coker } d' \xrightarrow{\tilde{v}} \text{coker } d \xrightarrow{\tilde{q}} \text{coker } d'' \longrightarrow 0$$

En pratique l'énoncé (5) est très utile. On l'utilise le plus souvent sous la forme suivante : étant donné un diagramme commutatif de A -modules

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{q} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont des suites exactes, on peut compléter de façon naturelle ce diagramme pour obtenir le suivant, appelé diagramme du serpent :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \ker d' & \xrightarrow{\tilde{u}} & \ker d & \xrightarrow{\tilde{p}} & \ker d'' & & \\ & & \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{p} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d' & & \downarrow d & & \downarrow d'' & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{v} & N & \xrightarrow{q} & N'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \pi' & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi'' & & \\ \delta & \hookrightarrow & \text{coker } d' & \xrightarrow{\tilde{v}} & \text{coker } d & \xrightarrow{\tilde{q}} & \text{coker } d'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

et dans lequel :

$$0 \longrightarrow \ker d' \xrightarrow{\tilde{u}} \ker d \xrightarrow{\tilde{p}} \ker d'' \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} d' \xrightarrow{\tilde{v}} \operatorname{coker} d \xrightarrow{\tilde{q}} \operatorname{coker} d'' \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

(6) Dédurre des questions précédentes que, pour toute suite exacte de complexes de chaînes (de A -modules)

$$0 \rightarrow (C'_\bullet, d') \xrightarrow{f} (C_\bullet, d) \xrightarrow{g} (C''_\bullet, d'') \rightarrow 0$$

il existe une longue suite exacte *naturelle* de A -modules

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_n(C') \xrightarrow{f} H_n(C) \xrightarrow{g} H_n(C'') \xrightarrow{\delta} H_{n-1}(C') \xrightarrow{f} H_{n-1}(C) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H_1(C) \xrightarrow{g} H_1(C'') \xrightarrow{\delta} H_0(C') \xrightarrow{f} H_0(C) \xrightarrow{g} H_0(C'') \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Exercice 6.5 (Comparaison de deux résolutions) Soit A un anneau commutatif unitaire. Une *résolution* d'un A -module M est un complexe (P_\bullet, d) tel que

- $P_i = 0$ pour tout $i < 0$;
- $H_j(P_\bullet) = 0$ pour tout $j \neq 0$;
- $H_0(P_\bullet) \simeq M$.

Si de plus, les P_i sont des A -modules libres, on dit que c'est une *résolution libre* de M .

1. Montrer que pour chaque A -module M , il existe un A -module libre F tel qu'il existe un morphisme surjectif $F \rightarrow M$. Si M est de plus de type fini, on peut prendre F de rang fini.
2. **(Existence)** Montrer que pour tout A -module, il existe une résolution libre.
3. Soient (P_\bullet, d) une résolution libre d'un module M , et (Q_\bullet, d) une résolution d'un autre module N . Si on se donne un morphisme $f : M \rightarrow N$, montrer qu'il admet un 'relèvement', *i.e.* un morphisme de complexes $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow Q_\bullet$, tel que le morphisme induit en homologie est exactement f . Montrer de plus que deux tels relèvements sont homotopes.
4. **(Unicité)** Soient (P_\bullet, d) et (Q_\bullet, d) deux résolutions libres, montrer que ils sont homotopes.

6.2 Ensembles simpliciaux

On note $\Delta := \{[0], [1], \dots\}$ la catégorie des ordinaux finis non-vides. Un ensemble simplicial est par définition un foncteur $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathfrak{Set}$. On note $\Delta^{op} \mathfrak{Set}$ ou simplement $\hat{\Delta}$ la catégorie des ensembles simpliciaux. On définit le *n -simplexe standard*, noté Δ_n , l'ensemble simplicial représenté par $[n] \in \Delta$, *i.e.* $\Delta_n = h([n])$, où h est le foncteur de Yoneda.

Exercice 6.6 Sous la notation précédente, montrer que

1. $\text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, \Delta_m) = \text{Hom}_{\Delta}([n], [m])$.
2. $\text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X) = X_n := X([n])$.

Exercice 6.7 (Foncteurs $|-|$ et Sing) Soit $X : \Delta^{op} \rightarrow \mathfrak{Set}$ un ensemble simplicial.

1. Rappeler la construction de réalisation $|X|$. Définir un foncteur de *réalisation* :

$$|-| : \hat{\Delta} \rightarrow \mathfrak{Top}.$$

2. Montrer que le foncteur réalisation admet un adjoint à droite

$$\text{Sing} : \mathfrak{Top} \rightarrow \hat{\Delta}.$$

3. Soit Y un espace topologique, montrer que l'application naturelle

$$|\text{Sing}(Y)| \rightarrow Y$$

induit des isomorphismes sur les groupes d'homologie.

Exercice 6.8 (Nerf) Soit \mathfrak{Cat} la catégorie des petites catégories. On a un foncteur naturel $\iota : \Delta \rightarrow \mathfrak{Cat}$ qui associe un ordinal fini non-vidé $[n]$ la catégorie dont les objets sont $\{0, 1, \dots, n\}$, et $\text{Hom}(i, j)$ est un point si $i \leq j$, vide si $i > j$.

1. Montrer que $\iota : \Delta \rightarrow \mathfrak{Cat}$ est pleinement fidèle, donc on peut voir Δ comme une sous-catégorie pleine de \mathfrak{Cat} .
2. On définit un foncteur *nerf* comme le composé de pull-back de préfaisceaux avec le foncteur de Yoneda

$$N = \iota^* \circ h : \mathfrak{Cat} \rightarrow \hat{\Delta}$$

plus précisément par la formule suivante :

$$N(\mathcal{C})_n := \text{Hom}_{\mathfrak{Cat}}(\iota([n]), \mathcal{C}),$$

où \mathcal{C} est une petite catégorie quelconque.

- (a) Décrire explicitement la structure d'ensemble simplicial du nerf d'une catégorie \mathcal{C} donnée.
- (b) Vérifier que $N \circ \iota([n]) = \Delta_n$.
3. Montrer que le foncteur nerf N admet un adjoint à gauche $\tau_1 : \hat{\Delta} \rightarrow \mathfrak{Cat}$, appelée *la catégorie fondamentale* d'un ensemble simplicial.
4. Montrer que le foncteur nerf $N : \mathfrak{Cat} \rightarrow \hat{\Delta}$ est pleinement fidèle, autrement dit, $\tau_1 \circ N$ est isomorphe au foncteur d'identité. Donc on peut voir la catégorie \mathfrak{Cat} des petites catégories comme une sous-catégorie pleine de la catégorie $\hat{\Delta}$ des ensembles simpliciaux.
5. ***(Théorème de Grothendieck-Segal)** Soit X un ensemble simplicial, il est dans l'image essentiel de N (*i.e.* il existe une petite catégorie $s\mathcal{C}$ telle que $X \simeq N(s\mathcal{C})$), si et seulement si $X \simeq N\tau_1(X)$, si et seulement si pour tout $n \geq 2$, l'application naturelle $X_n = \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(\Delta_n, X) \rightarrow \text{Hom}_{\hat{\Delta}}(I_n, X)$ est bijective, où I_n est l'ensemble simplicial d'une 'chaîne' de longueur n .

Exercice 6.9 (Dold-Kan Équivalence) On va établir une équivalence entre la catégorie $\mathbf{Ch}^+(\mathfrak{Ab})$ des complexes de groupes abéliens de degré positif et la catégorie $\Delta^o(\mathfrak{Ab})$ des groupes abéliens simpliciaux, dû à Dold-Kan. Par définition, un *groupe abélien simplicial* est un foncteur contravariant de la catégorie Δ des ordinaux finis vers la catégorie \mathfrak{Ab} des groupes abéliens.

1. (**Complexes normalisés**) Si on se donne un groupe abélien simplicial $X_\bullet \in \Delta^o(\mathfrak{Ab})$, on lui associe un complexe de degré positif C_\bullet suivant, appelé son *complexe normalisé* :

$$C_n = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(\partial_i : X_n \rightarrow X_{n-1}),$$

et le différentiel $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ est induit par $\partial_0 : X_n \rightarrow X_{n-1}$. Vérifier que (C_\bullet, d) est bien un complexe, et la construction est fonctorielle.

2. Soit (C_\bullet, d) un complexe de degré positif. On lui associe un groupe abélien simplicial suivant :

$$X_n = \bigoplus_{[n] \twoheadrightarrow [k]} C_k,$$

et pour toute application croissante $\rho : [m] \rightarrow [n]$, le morphisme

$$X_n = \bigoplus_{[n] \twoheadrightarrow [k]} C_k \rightarrow X_m = \bigoplus_{[m] \twoheadrightarrow [j]} C_j$$

en composante $\sigma : [n] \twoheadrightarrow [k]$ est défini par la composition :

$$C_k \xrightarrow{d^{k-s}} C_s \hookrightarrow \bigoplus_{[m] \twoheadrightarrow [j]} C_j = X_m,$$

où la deuxième flèche est l'inclusion du facteur direct correspond à $[m] \twoheadrightarrow [s]$, où $[m] \twoheadrightarrow [s] \hookrightarrow [k]$ est l'unique epi-mono décomposition de la composition $\sigma \circ \rho : [m] \rightarrow [n] \rightarrow [k]$. Vérifier que X_\bullet est bien un groupe abélien simplicial, et de plus la construction est fonctorielle.

3. Montrer que les deux foncteurs construits ci-dessus sont inverses l'un de l'autre.